Зачет по курсу "Теория случайных процессов"

Петрусова Екатерина Дмитриевна, 316 группа

14 мая 2020 г.

Вариант 104 (16 по порядку в группе)

1. $\xi(t) = A_1 cos(2t) + A_2 sin(2t), A_1, A_2$ - независимы. $EA_1 = EA_2 = 0$, $DA_1 = 1$, $DA_2 = 3$. Найти E, D, $K(t,s)$ случайного процесса.
Решение:

   1) $E\xi(t) = EA_1 cos(2t) + EA_2 sin(2t) = 0$
   2) Посчитаем корреляционную функцию
$$K(t,s) = cov(\xi(t), \xi(s)) = E(\xi(t)\xi(s)) - E\xi(s)E\xi(t) = E(\xi(t)\xi(s)) =$$
$$= E(A_1 cos(2t) + A_2 sin(2t))(A_1 cos(2s) + A_2 sin(2s)) =$$
$$= EA_1^2 cos(2t)cos(2s) + EA_1A_2 cos(2t)sin(2s) + EA_2A_1 sin(2t)cos(2s) +$$
$$+ EA_2^2 sin(2t)sin(2s) = cos(2t)cos(2s) + 3sin(2t)sin(2s)$$
   3) $D\xi(t) = K(t,t) = cos^2(2t) + 3sin^2(2t) = 1 + 2sin^2(2t)$

   Ответ: $E\xi(t) = 0$, $K(t,s) = cos(2t)cos(2s) + 3sin(2t)sin(2s)$, $D\xi(t) = 1 + 2sin^2(2t)$

2. Для процесса $\xi(t)$ из задачи 1 определим с.в. $\eta_1 = \int_0^{\pi} \xi(t)dt$, $\eta_2 = \int_0^{2\pi} \xi(t)dt$. Найти $E(\eta_1), E(\eta_2), D(\eta_1), D(\eta_2)$, $cov(\eta_1,\eta_2)$.
Решение: Для начала докажем, что $\xi(t)$ - непрерывен в средне квадратичном.
$$E|\xi(t+s) - \xi(t)| = E|A_1 cos(2t+2s) + A_2 sin(2t+2s) - A_1 cos(2t) - A_2 sin(2t)| =$$
$$= E|A_1(cos(2t)cos(2s) - sin(2t)sin(2s)) + A_2(sin(2t)cos(2s) + cos(2t)sin(2s)) -$$
$$- A_1 cos(2t) - A_2 sin(2t)| = E|A_1 cos(2t)(cos(2s) - 1) - A_1 sin(2t)sin(2s) +$$
$$+ A_2 sin(2t)(cos(2s) - 1) + A_2 cos(2t)sin(2s)| = E|(cos(2s) - 1)(A_1 cos(2t) +$$
$$+ A_2 sin(2t)) - sin(2s)(A_1 sin(2t) - A_2 cos(2t))| \to 0, s \to 0$$

$$E\eta_1 = E\int_0^{\pi}\xi(t)dt = \int_0^{\pi}E\xi(t)dt = 0$$

$$E\eta_2 = E\int_0^{2\pi}\xi(t)dt = \int_0^{2\pi}E\xi(t)dt = 0$$

$$D\eta_1 = K(\eta_1,\eta_1) = cov(\eta_1,\eta_1) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}K(t,t)dtdt = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(cos^2(2t)+$$

$$+3sin^2(2t))dtdt = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(1+2sin^2(2t))dtdt = \int_0^{\pi}((t+t-\frac{1}{4}sin(4t))\Big|_0^{\pi})dt =$$

$$= \int_0^{\pi}2\pi dt = 2\pi^2$$

$$D\eta_2 = K(\eta_2,\eta_2) = cov(\eta_2,\eta_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(t,t)dtdt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(cos^2(2t)+$$

$$+3sin^2(2t))dtdt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+2sin^2(2t))dtdt = \int_0^{2\pi}((t+t-\frac{1}{4}sin(4t))\Big|_0^{2\pi})dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}4\pi dt = 8\pi^2$$

$$cov(\eta_1,\eta_2) = E\eta_1\eta_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}K(t,s)dtds = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(cos(2t)cos(2s)+$$

$$+3sin(2t)sin(2s))dtds = \int_0^{\pi}(cos(2s)\int_0^{2\pi}cos(2t)dt + 3sin(2s)\int_0^{2\pi}sin(2t)dt)ds =$$

$$= \int_0^{\pi}(cos(2s)(\frac{1}{2}sin2t\Big|_0^{2\pi}) + 3sin(2s)(-\frac{1}{2}cos2t\Big|_0^{2\pi}))ds = 0$$

Ответ: $E\eta_1 = E\eta_2 = 0,\ D\eta_1 = 2\pi^2,\ D\eta_2 = 8\pi^2,\ cov(\eta_1,\eta_2) = 0$

3. $d\eta(t)$ - стандартный белый шум, $\xi_1 = \int\limits_0^1 t^2 d\eta(t), \xi_2 = \int\limits_0^1 t^4 d\eta(t)$. Найти $cov(\xi_1,\xi_2)$.
   Решение: По определению стандартного белого шума $E\xi_1 = E\xi 2 = 0 \Rightarrow cov(\xi_1,\xi_2) = E(\xi_1\xi_2) - E\xi_1 E\xi_2 = E(\xi_1\xi_2) = \int\limits_0^1 t^6 d\eta(t) = \frac{1}{7}$

   Ответ: $cov(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{7}$

4. Случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению $d\xi(t) = cos(t)\xi(t)dt + d\eta(t),\ t \geq 0,\ \xi(0) = \xi_0$. Найти общий вид решения этого уравнения.

Решение: По формуле с лекций, общее решение имеет вид:

$$\xi(t) = W(t,0)\xi_0 + \int_0^t W(t,s)d\eta(s),$$

где $W(t,s)$ есть фундаментальное решение:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}W(t,s) = cos(t)W(t,s), t > s \\ W(s,s) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W(t,s) &= e^{sin(t)+c(s)} \\ W(s,s) = 1 \Rightarrow c(s) &= -sin(s) \\ \Rightarrow W(t,s) &= e^{sin(t)-sin(s)} \end{aligned}$$

Общее решение стохастического дифференциального уравнения:

$$\xi(t) = e^{sin(t)}\xi_0 + \int_0^t e^{sin(t)-sin(s)}d\eta(s).$$

Ответ: $\xi(t) = e^{sin(t)}\xi_0 + \int_0^t e^{sin(t)-sin(s)}d\eta(s)$.

5. Пусть цепь Маркова с непрерывным временем имеет два состояния и следующую матрицу с интенсивностью перехода

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Используя уравнения Колмогорова, найти вероятности перехода $P_{ij}(t), t \geq 0$.
Решение: Цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний всегда регулярна. Фиксируем конечное состояние $j = 1$. Рассмотрим обратную систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{11}(t)}{dt} = -P_{11}(t) + P_{21}(t) \\ \\ \dfrac{dP_{21}(t)}{dt} = 5 \cdot P_{11}(t) - 5 \cdot P_{21}(t) \end{cases}$$

Начальные условия:

$$P_{11}(0) = 1, P_{21}(0) = 0.$$

В матричном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A \cdot P(t).$$

$$P(t) = e^{A \cdot t} \cdot P(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} - \frac{e^{-6t}}{6} \\ \frac{5}{6} - \frac{5e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} + \frac{5e^{-6t}}{6}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} - \frac{e^{-6t}}{6} \\ \frac{5}{6} - \frac{5e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} + \frac{5e^{-6t}}{6}) \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} + \frac{e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} - \frac{e^{-6t}}{6} \\ \frac{5}{6} - \frac{5e^{-6t}}{6} & \frac{1}{6} + \frac{5e^{-6t}}{6}) \end{pmatrix}$